ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

Г.И. Иванов

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ Δ_2 ПАРАБОЛ

Рассмотрим в трехмерном эквиаффинном пространстве совокупность всех парабол, образующих семимерное дифференцируемое многообразие $\mathfrak{M}_7$. В данной работе на $\mathfrak{M}_7$ изучается дифференцируемое двумерное распределение Δ_2 [1] парабол частного вида, а именно, распределение обладающее тем свойством, что для всякой точки параболы существует хотя бы одно фокальное интегральное I-семейство парабол распределения Δ_2 с фокусом в данной точке. Если такое распределение Δ_2 инвариантно, то совокупность его интегральных I-семейств расслаивается на семейства конгруэнций парабол с неопределенными фокальными поверхностями, которые исследованы автором в работах [2], [3]. В.С.Малаховским изучались конгруэнции коник с неопределенными фокальными семействами [4] и поверхностями [5] в проективном пространстве.

I. Распределения $\bar{\Delta}_2$ парабол

Присоединим к каждому элементу (параболе) многообразия $\mathfrak{M}_7$ репер $R = \{A, \bar{e}_i\}$, так, чтобы парабола имела уравнение

$$(x^1)^2 - 2x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \qquad (1)$$

Деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \quad (i, j, k = 1,2,3),$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства $\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$,

$\mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$ и условию эквиаффинности $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0$. Формы ω^2, ω^3, ω_2^1, $2\omega_1^1 - \omega_2^2$, $\omega^1 - \omega_1^2$, ω_1^3, ω_2^3 являются структурными формами [6] многообразия $\mathfrak{M}_7$.

Систему уравнений Пфаффа, ассоциированную с распределением парабол, можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} &\theta_i \equiv \omega^i - \delta_1^i \omega_1^2 - a^{ip} \omega_p^3 = 0, \\ &\theta_4 \equiv \omega_2^1 - a_2^{1p} \omega_p^3 = 0, \\ &\theta_5 \equiv 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - a_1^{1p} \omega_p^3 = 0, \quad (p = 1,2). \end{aligned} \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что система дифференциальных уравнений распределения Δ_2 парабол имеет вид

$$\begin{aligned} &da^{11} + 5a^{11}\omega_1^1 - a_1^{11}\omega_1^2 + a^{31}\omega_3^1 - \omega_3^2 = a^{11\alpha}\theta_\alpha, \\ &da^{12} + 6a^{12}\omega_1^1 + (a^{11} - a_1^{12})\omega_1^2 + a^{32}\omega_3^1 = a^{12\alpha}\theta_\alpha, \\ &da^{21} + 6a^{21}\omega_1^1 + a^{11}\omega_1^2 + a^{31}\omega_3^2 = a^{21\alpha}\theta_\alpha, \\ &da^{22} + 7a^{22}\omega_1^1 + (a^{21} + a^{12})\omega_1^2 + a^{32}\omega_3^2 = a^{22\alpha}\theta_\alpha, \\ &da^{31} + a^{31}\omega_1^1 - \omega_1^2 = a^{31\alpha}\theta_\alpha, \\ &da^{32} + 2a^{32}\omega_1^1 + a^{31}\omega_1^2 = a^{32\alpha}\theta_\alpha, \\ &da_2^{11} + 3a_2^{11}\omega_1^1 = a_2^{11\alpha}\theta_\alpha, \\ &da_2^{12} + 4a_2^{12}\omega_1^1 + a_2^{11}\omega_1^2 + \omega_3^1 = a_2^{12\alpha}\theta_\alpha, \\ &da_1^{11} + 4a_1^{11}\omega_1^1 - 3a_2^{11}\omega_1^2 + 2\omega_3^1 = a_2^{11\alpha}\theta_\alpha, \\ &da_1^{12} + 5a_1^{12}\omega_1^1 + (a_1^{11} - 3a_2^{12})\omega_1^2 - \omega_3^2 = a_1^{12\alpha}\theta_\alpha, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\theta_6 \equiv \omega_1^3$, $\theta_7 \equiv \omega_2^3$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, 7)$.

Обычным путем [8] получаем, что распределения Δ_2, на многообразии $\mathfrak{M}_7$ существуют и определяются с произволом десяти функций семи аргументов.

Всякое I-семейство парабол можно определить системой вида

$$\omega^i - \delta^i_1 \omega^2_1 = \rho^i \theta, \ \omega^1_2 = \rho^4 \theta, \ 2\omega^1_1 - \omega^2_2 = \rho^5 \theta, \ \omega^3_1 = \rho^6 \theta, \ \omega^3_2 = \rho^7 \theta, \quad (4)$$

где θ-параметрическая форма. Такие I-семейства парабол будут принадлежать распределению Δ_2 (т.е. будут интегральными для системы (2)) тогда и только тогда, когда равны нулю компоненты усеченного объекта трансверсальности [6]:

$$\rho^i - a^{i1}\rho^6 - a^{12}\rho^7 = 0, \ \rho^4 - a^{11}_2 \rho^6 - a^{12}_2 \rho^7 = 0, \ \rho^5 - a^{11}_1 \rho^6 - a^{12}_1 \rho^7 = 0.$$

Всякое интегральное I-семейство распределения Δ_2 парабол будем обозначать ψ_1. Выбором форм θ_6 и θ_7 за независимые из рассмотрения исключаются распределения парабол, имеющее хотя бы одно ψ_1 с параллельными плоскостями парабол. Для рассматриваемых распределений Δ_2 в каждой плоскости параболы существует точка M (характеристическая точка), принадлежащая характеристикам плоскостей парабол, соответствующим всем интегральным I-семействам распределения Δ_2.

Фокусом параболы, принадлежащей произвольному ψ_1 распределению Δ_2, называется точка $\mathcal{F}$, описывающая линию $\mathcal{F}(\psi_1)$, у которой касательная в точке $\mathcal{F}$ совпадает с касательной к параболе в этой точке. Если 1 - семейство ψ_1 распределения Δ_2 имеет по крайней мере одну фокальную линию, то оно называется фокальным. Проведем фиксацию репера, полагая

$$a^{31} = 0 \ (\pi^2_1 = 0), \ a^{12}_1 = 0 \ (\pi^2_3 = 0), \ a^{11}_1 = 0 \ (\pi^1_3 = 0).$$

Всякая точка параболы является фокусом хотя бы одного ψ_1 лишь при выполнении условий: $a^{32}a^{21} = 0$,

$$a^{1p}_2 = 0, \ a^{11} + a^{32} \cdot a^{11}_2 = 0, \ a^{21} + 2a^{12} = 0, \ a^{32}a^{11} + a^{22} = 0. \quad (5)$$

Будем говорить, что в этом случае фокусы параболы неопределены. Это однако не означает, что всякое ψ_1 распределения Δ_2 будет фокальным. Имеет место

Т е о р е м а 1. Если фокусы параболы неопределены, то фокальным будет всякое I-семейство (и только такое семейство), вдоль которого характеристика плоскости параболы имеет с параболой хотя бы одну общую точку.

Двумерные распределения на $\mathfrak{M}_7$, для которых всякая точка параболы является фокальной хотя бы для одного ψ_1, будем в дальнейшем обозначать $\bar{\Delta}_2$.

В общем случае фокальное ψ_1 имеет две фокальные линии. Однако через каждый элемент многообразия $\mathfrak{M}_7$ проходит два интегральных I-семейства (действительных различных, совпавших или мнимых) ψ'_1 и ψ''_1 с единственной фокальной линией. Точки этой линии называются главными фокусами, а соответствующие I-семейства ψ'_1 и ψ''_1 называются главными [4] фокальными I-семействами распределения $\bar{\Delta}_2$ парабол.

Т е о р е м а 2. Всякая парабола каждого ψ_1 распределения $\bar{\Delta}_2$ имеет два действительных различных (мнимых) главных фокуса, если характеристическая точка M плоскости параболы находится вне (внутри) области, ограниченной этой параболой и два совпавших главных фокуса, если точка M принадлежит параболе.

О п р е д е л е н и е. Распределением $\Delta^{(s)}_2$ $(s=0,1,2)$ назовем такое распределение $\bar{\Delta}_2$ парабол, что каждая парабола всякого ψ_1 этого распределения имеет соответственно два (мнимых, совпавших или действительных различных) главных фокуса.

В дальнейшем будем обозначать: I/ совокупность всех касательных к линиям, описываемым точкой $\mathcal{P}$ при смещениях, соответствующих всем интегральным I-семействам распределения Δ_2 парабол, через $T\mathcal{P}(\Delta_2)$; 2/ совокупность всех линейчатых поверхностей, описываемых прямой $\mathcal{P}Q$ вдоль ψ_1 распределения Δ_2 через $\mathcal{P}Q(\Delta_2)$; 3/ диаметр параболы через AM ($A\mathcal{D}$, если $A \equiv M$), прямую $R = \bar{A} + \lambda \bar{e}_3$

через $A\mathcal{L}$.

Определение. Асимптотическими, соответствующими некоторой точке $\mathcal{P}$, будем называть такие ψ_1 распределения Δ_2 парабол, вдоль которых точка $\mathcal{P}$ описывает линии, соприкасающаяся плоскость которых совпадает с плоскостью $T\mathcal{P}(\Delta_2)$.

Рассматривая систему (5), замечаем, что возможны лишь три случая (а/ $a^{21}=0$, $a^{32}\neq 0$, б/ $a^{21}\neq 0, a^{32}=0$, в/ $a^{21}=a^{32}=0$). Отметим основные результаты для каждого из полученных случаев.

2. Распределения $\Delta_2^{(2)}$ и $\Delta_2^{(0)}$

Рассмотрим первый случай, т.е. когда $a^{32}\neq 0$. Репер R становится каноническим, если положить $a^{32}=1$ или $a^{32}=-1$. Пусть вначале $a^{32}=1$, что соответствует распределению $\Delta_2^{(2)}$. Начало репера A помещено в точку пересечения параболы с ее диаметром AM, а вектор $\overline{e}_3$ в этом случае параллелен линии пересечения плоскостей $TF_1(\Delta_2^{(2)}), TF_2(\Delta_2^{(2)})$, где F_1 и F_2 - действительные главные фокусы параболы. Используя репер R, получаем следующий результат:

Теорема 3. Для того, чтобы распределение $\Delta_2^{(2)}$ парабол было инволютивно, необходимо и достаточно, чтобы 1/ всякая линейчатая поверхность множества $A\mathcal{L}(\Delta_2^{(2)})$ была цилиндром и 2/ сопряженность [7] на $M(\Delta_2^{(2)})$ была взаимной.

Пусть $a^{32}=-1$. Для соответствующих этому случаю распределений $\Delta_2^{(0)}$ геометрическая характеристика условий инволютивности аналогична условиям инволютивности распределения $\Delta_2^{(2)}$. Различие с теоремой 3 заключается лишь в том, что прямая $A\mathcal{L}$ в этом случае имеет геометрическую характеристику.

3. Распределения $\Delta_2^{(1)}$ парабол.

Так как для распределений $\Delta_2^{(1)}$ $a^{32}=0$, то сдвоенный главный фокус A параболы совпадает с точкой M.

Теорема 4. Главное фокальное 1-семейство распределения $\Delta_2^{(1)}$ совпадает с таким ψ_1, вдоль которого главный фокус описывает линию, соприкасающаяся плоскость которой совпадает с плоскостью параболы.

Пусть $\psi_1^{(1)}$ и $\psi_1^{(2)}$ асимптотические 1-семейства парабол, соответствующие точке A. Обозначим через $Q_1(Q_2)$ квадрику, которая содержит прямую $TA(\psi_1^{(1)})$ $(TA(\psi_1^{(2)}))$ и две бесконечно близкие к ней прямые, полученные при смещении точки A вдоль $\psi_1^{(2)}$ $(\psi_1^{(1)})$.

Теорема 5. Для того, чтобы распределение $\Delta_2^{(1)}$ парабол было инволютивно необходимо и достаточно, чтобы: 1/ сопряженность на $A(\Delta_2^{(1)})$ была взаимной и 2/ квадрики Q_1 и Q_2 совпадали.

Распределения $\Delta_2^{(2)}, \Delta_2^{(0)}$ и $\Delta_2^{(1)}$ существуют и определяются с произволом четырех функций семи аргументов.

Пусть в системе (5) $a^{21}=0$ и $a^{32}=0$. Тогда $TA(\Delta_2^{(1)})$ вырождено в прямую. Обозначим соответствующее распределение $\Delta_2^{(1)}$ через $\tilde{\Delta}_2^{(1)}$. Такие распределения существуют и определяются с произволом трех функций семи аргументов. Имеем следующие результаты.

Теорема 6. Главный фокус A параболы вдоль всякого ψ_1 распределения $\tilde{\Delta}_2^{(1)}$ описывает кривые, касающиеся одной и той же прямой AK (касательной к параболе в точке A).

Теорема 7. Для того, чтобы распределение $\tilde{\Delta}_2^{(1)}$ парабол было инволютивно необходимо и достаточно, чтобы вдоль всякого интегрального распределения $\tilde{\Delta}_2^{(1)}$ 1/ все кривые описываемые точкой A, имели одну и ту же соприкасающуюся плоскость и 2/ прямая $A\mathcal{L}$ описывала цилиндр (прямая $A\mathcal{L}$ в этом случае направлена по линии пересечения касательных плоскостей конусов, описываемых прямыми AK и $A\mathcal{D}$).

Список литературы

1. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., ИИЛ, 1960.

2/И в а н о в Г.И. Конгруэнции парабол с неопределенными фокальными поверхностями.- Тр.Томского ун-та. Геом.сб. ,255,1974,с.203-226.

3.И в а н о в Г.И. Об одном классе конгруэнций парабол с неопределенными фокальными поверхностями.- Тр. Томского ун-та.Геом.сб. 17,1976,с.72-76.

4.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными свойствами.- Тр.Томского ун-та.Геом.сб. 160,1962,с.5-14.

5.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.7,1976.с.54-61,

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.11 1980

В.Б. К и м

КОМПЛЕКС НЕОСОБЕННЫХ КУБИК В P_3

1.Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3 ,отнесенное к подвижному реперу $\{A_J\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega_J^K A_K \quad (J,K,L = 0,1,2,3). \tag{1}$$

Формы Пфаффа ω_J^K удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{2}$$

и условию

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{3}$$

В P_3 рассмотрим комплекс неособенных кубик.В репере нулевого порядка кубика K_3 задается уравнениями

$$x^0 = 0, \quad a_{ijk} x^i x^j x^k = 0. \tag{4}$$

Тогда уравнения комплекса кубик можно записать в виде

$$\Theta_{ijk} = b_{ijk}^{\ell} \omega_\ell \quad (i,j,k,\ell,m = 1,2,3). \tag{5}$$

Здесь

$$\omega_i = \omega_i^0,$$

$$\Theta_{ijk} = d a_{ijk} - a_{ijk,m}^{\ell} \omega_\ell^m, \tag{6}$$

$$a_{ijk,m}^{\ell} = a_{mjk}\delta_i^\ell + a_{imk}\delta_j^\ell + a_{ijm}\delta_k^\ell - 3a_{ijk}a_{11m}\delta_1^m.$$

Функции $a_{ijk,m}^{\ell}$ и b_{ijk}^{ℓ} удовлетворяют системе уравнений